

¿PARA QUÉ SE DEMUESTRA EN MATEMÁTICA? CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA DE UN INSTITUTO DE FORMACIÓN DE PROFESORES

Mag. Gustavo Franco Carzolio – Dra. Verónica Molfino Vigo
gfrancoc@gmail.com – veromolfino@gmail.com
Instituto de Profesores “Artigas” – Montevideo, Uruguay

Tema: IV.1 - Formación inicial.

Modalidad: CR.

Nivel Educativo: Formación y actualización docente.

Palabras clave: estudiantes de profesorado, demostración, funciones de la demostración.

Resumen

En esta conferencia regular se presentan algunos de los resultados obtenidos en una investigación realizada con estudiantes del profesorado de matemática del Instituto de Profesores “Artigas” (Montevideo, Uruguay), sobre sus concepciones en torno a las funciones de la demostración. El estudio revela que los estudiantes tienen concepciones muy variadas con respecto a las mismas que no se limitan a las funciones descritas por de Villiers (1993). Además de las funciones de verificación/convicción, de explicación, de sistematización y de comunicación (de Villiers, 1993), pudimos identificar diversos roles que la demostración cumpliría para los estudiantes, lo cual no solo revela sus concepciones en torno a la misma, sino que también podría estar arrojando información sobre cómo se presenta la demostración en la clase de matemática.

1. Introducción

Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática recomiendan la inclusión de la demostración en el currículo de matemática de Enseñanza Media –e incluso antes–, como un eje transversal que intervenga en el tratamiento de los distintos temas de los programas (Dreyfus, 2000; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000):

El razonamiento y la prueba no pueden simplemente ser enseñados en una única unidad sobre lógica, por ejemplo, o “demostrando” en geometría. [...] El razonamiento y la prueba deberían ser una parte consistente de la experiencia matemática de los estudiantes, desde el preescolar hasta el bachillerato (NCTM, 2000, p. 56).

Si bien muchos profesores son conocedores de recomendaciones didácticas como las anteriores, diferentes trabajos de investigación (Knuth, 2002; Jones, 1997) reportan, por un lado, que estos poseen concepciones limitadas sobre la demostración y, por otro, que

tienen dificultades para implementar prácticas de enseñanza que atiendan dichas recomendaciones.

Frente a esta problemática, como forma de introducir el debate y la reflexión en el contexto educativo uruguayo, llevamos a cabo una investigación cuyo objetivo fue identificar y analizar las concepciones de estudiantes de profesorado de matemática en torno a la demostración (Franco, 2010).

2. Aspectos teóricos

Para iniciar la identificación y el análisis de las concepciones sobre las funciones de la demostración en matemática de los estudiantes, hemos utilizado la categorización que realiza de Villiers (1993). Este autor distingue cinco funciones de la demostración (concernientes al quehacer de los matemáticos profesionales):

1) *verificación/convicción*: esta es la función que tradicionalmente se le ha asignado a la demostración; pero la convicción, señala el autor siguiendo a Bell (1976), surge a menudo por medios distintos.

Por otro lado, según de Villiers (1993), los profesores de matemática, casi sin excepciones, consideran que la demostración brinda garantías absolutas acerca de la validez de una proposición. Parecen sostener la idea naïf, descrita por Davis y Hersch (1986), acerca de que detrás de cada demostración hay una secuencia de transformaciones absolutamente comprensibles e irrefutables desde la hipótesis a la tesis, que garantizan la validez de la proposición.

2) *explicación*: de Villiers señala que se puede obtener un alto grado de confianza acerca de la validez de una proposición por verificación cuasi-empírica, pero que esto no permite obtener el sentido psicológicamente satisfactorio de iluminación, es decir, no permite percibir desde dentro cómo a partir de resultados familiares se puede llegar a la tesis. Señala que para la mayoría de los matemáticos es probablemente más importante el aspecto aclaratorio/explicativo de la demostración que el aspecto de verificación.

3) *sistematización*: según esta función, la demostración tiene por objetivo organizar lógicamente un conjunto de enunciados independientes, que de antemano se sabe que son verdaderos, en un todo coherente y unificado. El autor señala que es incorrecto decir en el aula, ante proposiciones que son evidentes por sí mismas –como las que aparecen en la introducción de la geometría euclidiana–, que la demostración se realiza para

asegurar que la proposición es verdadera, ya que en esos casos los matemáticos están más preocupados por la organización dentro de un sistema deductivo que por la verificación.

4) *comunicación*: señala de Villiers (1993) que la demostración es una manera única de comunicar resultados matemáticos entre profesionales, entre profesores y alumnos y entre los propios alumnos. La demostración como forma de interacción social permite la negociación subjetiva, no solo del significado de los conceptos concernidos en la demostración, sino también, y de forma implícita, de los criterios para aceptar una demostración como válida.

5) *descubrimiento*: de Villiers sostiene que en la historia de la matemática existen numerosos ejemplos de descubrimientos realizados en forma puramente deductiva (por ejemplo las geometrías no-euclidianas).

3. Aspectos metodológicos

Para alcanzar el objetivo de esta investigación se aplicó simultáneamente a cuatro grupos de estudiantes –cada uno de ellos correspondiente a uno de los cuatro años de la carrera– un cuestionario constituido por ocho preguntas. Posteriormente se realizaron entrevistas a tres estudiantes –las que fueron grabadas en audio– debido a que algunas de sus respuestas nos habían resultado de interés y no queríamos especular en relación al alcance de las mismas.

Las preguntas del cuestionario son:

- (1) ¿Qué es una demostración matemática?
- (2) ¿Para qué se demuestra en matemática?
- (3) ¿Para qué se demuestra en la clase de matemática?
- (4) Los profesores del IPA¹, ¿realizan demostraciones en el pizarrón durante la clase? En caso afirmativo, ¿para qué lo hacen?
- (5) En las clases de matemática del IPA, ¿tú realizas demostraciones? ¿Para qué lo haces?
- (6) Los profesores de Enseñanza Media, ¿realizan demostraciones en el pizarrón durante la clase? En caso afirmativo, ¿para qué lo hacen?

¹ Instituto de Profesores “Artigas”.

- (7) ¿Recuerdas alguna demostración que te haya resultado particularmente significativa? ¿Cuál? ¿En Enseñanza Media o en el IPA? ¿Por qué?
- (8) ¿Sentiste alguna vez la necesidad de demostrar algo? ¿Para qué?

4. Análisis de las concepciones de los estudiantes relativas a las funciones de la demostración detectadas en sus respuestas

Al momento de analizar las respuestas de los estudiantes, la categorización realizada por de Villiers (1993) nos resultó insuficiente: ceñirnos a considerar únicamente las cinco funciones descritas por el autor en su artículo, sería desconocer una realidad bastante más rica y variada que es la que se infiere de dichas respuestas.

Estas son algunas de las nuevas funciones de la demostración que detectamos:

4.1. La función de fundamentación

Veamos las siguientes respuestas²:

E1-17: [Una demostración] Es la argumentación que damos frente a una información que se nos brinda como verdadera y nos permite llegar a otra.

E2-13: Una demostración matemática es la justificación o fundamentación de la veracidad o falsedad de una proposición planteada anteriormente.

En las respuestas anteriores el énfasis no recae en la *verificación/convicción* ni en la *explicación*, sino en *brindar un argumento convincente que justifique por qué es verdadera la proposición*. En otras palabras, el propósito de la demostración no sería en esencia el de verificar que una proposición es verdadera o convencer de que lo es (función de verificación/convicción), sino brindar un argumento convincente de por qué

² Con *Ex-y* nombraremos al estudiante que cursa el año *x* y al que se le ha asignado, arbitrariamente, el número *y*. De este modo, E1-17 es el estudiante de primer año al que le hemos asignado el número 17.

En las citas que realizaremos de las respuestas de los estudiantes hemos respetado la sintaxis aunque, si existían, fueron corregidas las faltas de ortografía.

lo es, sin que esto implique que la demostración deba mostrar los engranajes que iluminan el resultado (función de explicación): importa más la cadena argumentativa que justifica la validez de una proposición que la justificación misma.

Si bien puede considerarse a la función de fundamentación dentro de la función de verificación/convicción, presenta un matiz que la distingue de ésta última y la hace específica del ámbito educativo: cuando a un estudiante se le solicita realizar la demostración de una proposición dando por sentada su veracidad, la función de la demostración no puede ser la de verificación/convicción; por lo menos no en el mismo sentido en el que lo es cuando un matemático realiza la demostración de una proposición por primera vez. En el caso mencionado anteriormente, la tarea del estudiante –que está relacionada con mostrar que es capaz de brindar argumentos que justifiquen la validez de la proposición, más que con verificar que la proposición es verdadera–, determina otra función de la demostración (la de fundamentación) distinta de la de verificación/convicción.

4.2. *La función de ratificación*

Veamos las siguientes respuestas:

E1-8: [...] En realidad la demostración es lo único que respalda las afirmaciones hechas por el docente.

E4-13: [Se demuestra] Para avalar un resultado de algo que ya fue demostrado por alguien.

Según estos estudiantes la demostración garantizaría la validez de una cierta proposición más allá de la palabra, por ejemplo, del profesor. Es decir, la demostración permitiría la objetivación del valor de verdad de una proposición de modo que su validez no dependa de un argumento de autoridad. Hemos denominado a esta función de la demostración en la matemática escolar, función de *ratificación*. Esta función está vinculada con la función de verificación/convicción; más precisamente podemos decir que es un caso particular de la función de fundamentación.

4.3. *La función de comprensión de la disciplina*

Algunos estudiantes señalan que la demostración permite comprender mejor a la matemática:

E3-9: [...] [Se demuestra en la clase de matemática] para familiarizarse con la matemática en sí. Es decir, esta está llena de teoremas, conjeturas y demostraciones y es parte de la matemática el estar en contacto con ellos.

E3-16: En secundaria pienso que es [que se demuestra] para que los alumnos se familiaricen, se empapen en cómo se trabaja en matemática. [...]

Según estos estudiantes la demostración permitiría una comprensión más profunda del objeto de estudio de la matemática y de cómo se trabaja en dicha disciplina. A esta nueva función de la demostración en la matemática escolar la hemos llamado función de *comprensión de la disciplina*. La presencia de esta función podría indicar que algunos estudiantes del Instituto de Profesores “Artigas” consideran que la demostración es una actividad intrínseca y sustancial de la matemática.

4.4. *La función relativa al rol docente*

Algunas respuestas están relacionadas con el futuro desempeño profesional de los estudiantes como profesores:

E1-4: [...] [Los profesores demuestran en el pizarrón] también para mostrarle al alumno que quiere ser profesor de matemática cómo hacer una demostración ordenada, al menos darle las herramientas para que en una clase futura lo pueda hacer por sí solo.

E1-6: Los profesores del IPA hacen especial énfasis en mostrar demostraciones porque se busca algo diferente que en otras instituciones que enseñan matemáticas. Buscan que los estudiantes puedan ellos transmitir esas formas de razonamiento, para lo que precisan poder comprender e incorporar para poder trabajarlas.

Resulta interesante esta función, a la que hemos denominado función *relativa al rol docente*, porque es intrínseca no solo a la enseñanza de la matemática sino a la que refiere específicamente al profesorado: la demostración en el ámbito de la formación de

profesores, según algunos estudiantes, tiene como uno de sus objetivos el preparar a los futuros docentes para el trabajo en el aula.

5. Conclusiones

El estudio realizado revela que los estudiantes³ poseen concepciones muy variadas en torno a las funciones de la demostración. Nuestro estudio tenía como propósito determinar las concepciones de los estudiantes relativas a las funciones de la demostración teniendo como referencia las funciones descritas por de Villiers (1993), pero las respuestas de los estudiantes determinó una tipología mucho más amplia.

Las cinco funciones descritas por de Villiers (1993) surgen del quehacer de los matemáticos profesionales e imponen, en algún sentido, al ámbito de la enseñanza de la matemática, una labor que favorezca su interiorización en los estudiantes. Es decir, el valor de estas funciones está determinado en forma extrínseca a la enseñanza de la matemática y parece estar justificado por la relevancia que estas funciones tienen en el ámbito de los matemáticos profesionales. A diferencia de las funciones descritas por de Villiers (1993), las nuevas funciones surgen en el ámbito de la enseñanza: fueron inferidas de las respuestas de los estudiantes al cuestionario. En este caso no se determina el valor de unas ciertas funciones y luego se analiza su presencia en el ámbito educativo, sino que la presencia de unas ciertas concepciones por parte de los estudiantes señalan unas ciertas funciones.

Conocer las concepciones de los estudiantes –más allá de nuestras expectativas y de nuestro acuerdo– nos permite, entre otras cosas, posicionarnos mejor frente al desafío de enriquecer sus visiones en lo referente a las funciones descritas por de Villiers (1993). Pero además, estar al corriente de la diversidad de funciones que tiene la demostración para los estudiantes, puede permitir a los docentes implementar prácticas de aula más deliberadas: si los profesores a la hora de proponer actividades tienen en cuenta las diversas funciones que para los estudiantes se podrían estar poniendo en juego, quizás les sería posible tratarlas como variables sobre las cuales incidir ya sea para enfatizar una función o anularla.

³ En esta sección con el término *estudiantes* estaremos haciendo exclusiva referencia a los estudiantes del profesorado de matemática del Instituto de Profesores “Artigas” que participaron en este estudio.

Referencias bibliográficas

- Bell, A. (1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Davis, P. J. y Hersch, R. (1986). *Descartes' dream*. New York: HBJ Publishers.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon*, 26, 15-30.
- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del currículum. *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, 125-134.
- Franco, G. (2010). *¿Por qué se demuestra en matemática? Concepciones de los estudiantes de un instituto de formación de profesores de matemática* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional del Comahue. Argentina.
- Jones, K. (1997). Student-Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. *Mathematics Education Review*, 9, 16-24.
- Knuth, E. (2002). Secondary School Mathematics Teacher's Conceptions of Proof. *Journal for research in mathematics education*, 33, 379-405.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: Autor.